

FORMEEL RAAMWERK · COGNITIEVE GEOMETRIE

De Geometrie van Leren

Een formeel model voor cognitieve ontwikkeling op basis van quaternionenalgebra en niet-commutatieve geometrie

SAMENVATTING

Leren is fundamenteel een kwestie van volgorde, maar bestaande modellen gaan voorbij aan de dynamische consequenties hiervan. Dit artikel presenteert een formeel raamwerk dat leren niet ziet als passieve accumulatie, maar als een traject door een niet-commutatieve cognitieve ruimte. Door cognitieve operaties voor te stellen als rotaties in een quaternionenalgebra, biedt het model een wiskundige structuur voor drie kernfenomenen: volgorde-afhankelijke leertrajecten, iteratieve verdieping (het spiraalcurriculum) en de plotselinge, structurele reorganisatie die bekendstaat als *transformationeel leren* — hier **fase-inversie** genoemd.

Waarom volgorde de kern van leren is

Het is een intuïtief én empirisch bewezen gegeven dat de volgorde waarin we materiaal tegenkomen, bepaalt *wat* we leren. Een student die eerst de elegante abstracties van de calculus leert en pas daarna de weerbarstige praktijk van de kinematica, ontwikkelt een andere cognitieve relatie met wiskunde dan iemand die eerst met de fysica van beweging heeft geworsteld.

Fundamentele pedagogische theorieën erkennen dit impliciet. Bruners spiraalcurriculum (1960), Kolbs ervaringsleercyclus (1984) en Mezirows transformationele leertheorie (1991) zijn allemaal afhankelijk van volgorde. Toch delen ze een kritische beperking: ze beschrijven *wat* er verandert, maar missen een formeel, dynamisch model van *hoe* geordende operaties deze veranderingen genereren.

Hedendaagse computationele modellen behandelen leren als een update-proces van een cognitieve toestand waarbij volgorde vaak commutatief is. Ze slagen er niet in het pad-afhankelijke karakter van echt leren te vatten. Dit artikel doet een radicaal voorstel: een formeel raamwerk waarin leren wordt opgevat als de dynamische evolutie van een cognitieve toestand door een **niet-commutatieve geometrie**.

De volgorde van cognitieve operaties is geen pedagogische voorkeur, maar een **geometrische noodzaak**. De meest ingrijpende leermomenten zijn topologisch van aard.

§ 2

Het formele raamwerk: cognitie op een hypersfeer

2.1 De structurele noodzaak van quaternionen

De keuze voor quaternionenalgebra ($\mathbb{H}$) is geen willekeurige versiering, maar een structurele noodzaak. Reële getallen bieden geen niet-commutativiteit. Complexe getallen kunnen hooguit één rotatie-operator representeren. Octonionen zijn niet-associatief, wat formele problemen geeft bij het samenstellen van operaties.

Quaternionen, ontdekt door Hamilton (1844), zijn de *minimale* algebraïsche structuur die aan alle criteria voldoet: associatief, genormeerd, en met drie onafhankelijke imaginaire eenheden ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) die niet-commuterende rotaties genereren.

2.2 De cognitieve toestand als punt op S^3

We representeren de cognitieve toestand op tijdstip t als een eenheidsquaternion op de drie-sfeer S^3 :

$$q(t) = a(t) + b(t) \cdot i + c(t) \cdot j + d(t) \cdot k, \quad |q(t)| = 1$$

COMPONENT	NAAM	COGNITIEVE BETEKENIS
$a(t)$	Scalar van coherentie	Geïntegreerde, stabiele kennis — geresolveerd, geïnternaliseerd, beschikbaar voor vloeiend gebruik
$b(t), c(t), d(t)$	Vector van differentiatie	Actieve cognitieve operaties — spanningen, onderscheidingen, perspectieven in verwerking. Hoge magnitude = hoge cognitieve belasting

2.3 Cognitieve operatoren als rotaties

We stellen drie fundamentele, irreducibele cognitieve operaties voor als conjugatie-operatoren:

L_i **OBSERVEREN**

$$q \mapsto iq i^{-1}$$

Differentieert perceptuele input. Opmerken, traceren en registreren van onderscheidingen in het ervaringsveld.

 L_j **ABSTRAHEREN**

$$q \mapsto jq j^{-1}$$

Vormt algemene schema's. Abstraheert principes, categorieën en patronen uit geobserveerde gevallen.

 L_k **TOEPASSEN**

$$q \mapsto kq k^{-1}$$

Toetst abstracties in de wereld. Zet schema's in in nieuwe contexten, genereert bevestigende of uitdagende uitkomsten.

HET FORMELE HART VAN HET MODEL

De operatoren zijn **niet-commutatief**: $L_i L_j(q) \neq L_j L_i(q)$. De volgorde waarin een leerling observeert, abstraheert en toepast, bepaalt hun traject — een geometrische noodzaak, geen pedagogische voorkeur.

§ 3

Helische trajecten: de geometrie van iteratieve verdieping

Onder gestructureerde, herhaalde iteratie — zoals in een goed ontworpen spiraalcurriculum — produceren de dynamieken **helische trajecten** op S^3 . De leerling doorloopt opnieuw vergelijkbare cognitieve operaties (de rotationele component), maar vanuit een gewijzigde oriëntatie, wat een dieper begripsniveau representeert (de axiale component).

De spoed van de helix, $P = da/d\theta$, kwantificeert de mate van integratie per cognitieve cyclus. Dit is de formele uitdrukking van Bruners inzicht: elke ronde door de stof levert een kwalitatief rijker begrip op. De spoed is een *ontwerpbaar* kenmerk van een curriculum, bepaald door de frequentie en diepgang van integratiefases.

§ 4

Fase-inversie: de topologie van transformatie

4.1 De SU(2)-double cover

Een fundamentele eigenschap van quaternionen is de twee-op-één afbeelding van de groep van eenheidsquaternionen SU(2) naar de groep van driedimensionale rotaties SO(3). Elke rotatie in onze vertrouwde 3D-ruimte correspondeert met twee antipodale punten op S^3 : een quaternion q en zijn negatie $-q$. Hoewel zij dezelfde waarneembare oriëntatie vertegenwoordigen, zijn het intern verschillende toestanden.

4.2 Fase-inversie als leergebeurtenis

We definiëren **fase-inversie** als de topologische transitie $q \rightarrow -q$. De waarneembare prestatie van de leerling lijkt misschien vergelijkbaar, maar hun interne cognitieve structuur is fundamenteel gereorganiseerd: elke relationele oriëntatie is omgekeerd.

De transitie is geen geleidelijke rotatie, maar een *discrete sprong* via de inversie-operator $\mathcal{I}: q \mapsto -q$. Deze operator zit niet in de samenhangende component van de identiteit in $SU(2)$ — hij kan niet worden bereikt door geleidelijke, unitaire evolutie. Dit verklaart waarom transformationeel leren het karakter heeft van een plotselinge, onomkeerbare herstructurering.

4.3 De trigger: gefaalde verwachtingen

Fase-inversie vereist de combinatie van twee voorwaarden, gebaseerd op Schanks theorie van gefaalde verwachtingen (1982):

1

Cyclusvoltooing

De leerling heeft een volledige cyclus $L_i \rightarrow L_j \rightarrow L_k$ doorlopen. Het systeem bevindt zich nu antipodaal ten opzichte van de startpositie.

2

Gefaalde verwachting

Op dit exacte moment blijft een verwachte operator uit. Het impliciete script van de leerling wordt geschonden. Louter verstoring

De topologische voorwaarde voor de sprong is vervuld.

volstaat niet — de gestructureerde cyclus maakt de gefaalde verwachting tot de sleutel die de topologische overgang ontgrendelt.

FORMELE SYNTHESE

Fase-inversie is de dynamische handtekening van Schanks 'scriptfalen', Mezirows 'perspectiefransformatie' en Kegans 'ontwikkelingssprong' — alle drie formeel verankerd in één gemeenschappelijk geometrisch mechanisme.

§ 5

Convergentie: van differentiatie naar coherentie

Naarmate leren stabiliseert en meesterschap wordt bereikt, voorspelt het model een specifiek convergentiepatroon: de actieve differentiaties verdwijnen naarmate de kennis wordt geïntegreerd in de scalaire component.

$$|\operatorname{Im}(q(t))| \rightarrow 0 \quad \text{en} \quad a(t) \rightarrow 1$$

De cognitieve toestand wordt coherent en stabiel. De geschiedenis van de leerreis gaat echter niet verloren — ze is gecodeerd in de richting van waaruit de convergentie plaatsvond. Dit voorspelt dat leerlingen die hetzelfde competentieniveau bereiken via verschillende sequenties, *verschillende profielen* van transfer en begrip zullen vertonen.

§ 6

Praktijk gaat voor theorie: operatorinductie vanuit falen

De operatorvolgorde is geen universeel voorschrift. Ze komt voort uit het unieke faalpatroon van een praktijk — of het nu chirurgie, timmeren of handelen is.

Theorie is in deze visie geen voorwaarde voor praktijk, maar een *late compressie* ervan. Een formele theorie is een reconstructie van een doorlopen geschiedenis van praktische mislukkingen. Een theorie overdragen zonder de bijbehorende faalgeschiedenis is als het overdragen van een compressie zonder de data die het comprimeert. De leerling kan de theorie reproduceren, maar niet *gebruiken*.

Het artikel stelt een inductief algoritme voor dat de operatorvolgorde reconstrueert uit een geschiedenis van faalgebeurtenissen — een weg naar datagestuurd curriculumontwerp.

Implicaties voor leerontwerp

⌚ **Sequencing is structureel**

Pedagogiek moet expliciet zijn over de volgorde van operaties. Volgorde is geen vrije keuze.

↑ **Spiraleren is geometrisch gefundeerd**

De helix biedt een wiskundige rechtvaardiging voor het herzien van onderwerpen op steeds hoger niveau.

⚡ **Transformatie is ontwerpbaar**

Leeromgevingen kunnen expliciet worden ontworpen om de condities voor fase-inversie te creëren: gestructureerde cycli met ingebouwde gefaalde verwachtingen.

⦿ **Integratie is noodzakelijk**

Curricula moeten fases bevatten die specifiek zijn ontworpen voor consolidatie, niet alleen voor de introductie van nieuwe differentiaties.

✕ **Begin met falen**

De meest effectieve curricula onderdompelen leerlingen in de karakteristieke faalpatronen van een domein, vóór theoretische kaders worden geïntroduceerd.

CASE STUDY

De software-engineering leerling

Software-engineering is een ideale testcase: fouten worden geregistreerd, volgorde-afhankelijkheid is gedocumenteerd, en beoefenaars melden discrete momenten van herstructurering. De drie operatoren vertalen zich direct:

 L_i **OBSERVEREN**

Code lezen en traceren

 L_j **ABSTRAHEREN**Ontwerpen, patroonherkenning,
architectuurdenken L_k **TOEPASSEN**

Implementeren, testen en debuggen

Twee voorspelde fase-inversies

EERSTE INVERSIE

Syntactisch → Semantisch begrip

Een novice slaagt erin code te laten compileren (cyclusvoltooing), maar ontdekt dat deze de verkeerde output produceert (gefaalde verwachting). 'Correctheid' verschuift van compilatiegoedkeuring naar programmagedrag.

TWEEDE INVERSIE

Semantisch → Architectonisch begrip

Een competente ontwikkelaar stuit op een wijzigingsverzoek dat de huidige architectuur niet kan accommoderen zonder massale herstructurering. De gefaalde verwachting ("werkende code is afgewerkte code") maakt onderhoudbaarheid en structuur tot primaire zorg.

Dit pleit voor een '**falen-eerst**'-curriculum: novices onderdompelen in het debuggen, uitbreiden en repareren van kapotte systemen, zodat de operatorstructuur van het domein uit hun eigen praktijk voorkomt, vóóordat formele theorie wordt geïntroduceerd.

L I T E R A T U U R

Geannoteerde referentielijst

The Process of Education

Bruner, J. S. (1960) — Harvard University Press

Introduceert het spiraalcurriculum. Het helische traject in dit model biedt een formele, geometrische fundering voor Bruners intuïtieve idee: de spiraal is een noodzakelijk gevolg van niet-commutatieve, cyclische cognitieve operaties.

Quantum Models of Cognition and Decision

Busemeyer, J. R. & Bruza, P. D. (2012) — Cambridge University Press

Overzicht van kwantumformalisme toegepast op menselijk oordelen en beslissen. Deelt de kernpremissie dat niet-klassieke waarschijnlijkheid en niet-commutatieve operatoren essentieel zijn voor cognitieve dynamiek.

Categorization and representation of physics problems by experts and novices

Chi, Feltovich & Glaser (1981) — Cognitive Science, 5(2)

Toont aan dat experts problemen categoriseren op diepe principes, novices op oppervlaktekenmerken. Het model verklaart dit als gevolg van fase-inversie: een structurele reorganisatie na cycli van gefaalde verwachtingen.

Mind Over Machine

Dreyfus, H. L. & Dreyfus, S. E. (1986) — Free Press

Het vijfstadia-model van novice tot expert. De afnemende spoed van de leerhelix op hogere niveaus correspondeert met de overgang van regelvolgende competentie naar intuïtieve expertise.

On quaternions

Hamilton, W. R. (1844) — Proceedings of the Royal Irish Academy, 2

De oorspronkelijke publicatie van de quaternionen. Opgenomen als eerbetoon aan de diepe wiskundige geschiedenis waarop dit raamwerk is gebouwd.

In Over Our Heads

Kegan, R. (1994) — Harvard University Press

Beschrijft de evolutie van bewustzijn door kwalitatief verschillende 'orden van de geest'. Fase-inversie wordt gezien als het formele dynamische proces dat aan deze ontwikkelingssprongen ten grondslag ligt.

Experiential Learning

Kolb, D. A. (1984) — Prentice Hall

De ervaringsleercyclus. Dit essay herinterpreteert de vierfasencyclus niet als lineaire progressie, maar als gestructureerde operatorvolgorde. De drie operatoren zijn een distillatie van Kolbs cyclus.

Transformative Dimensions of Adult Learning

Mezirow, J. (1991) — Jossey-Bass

Transformationeel leren getriggerd door een 'desoriënterend dilemma'. Dit essay biedt een formele kandidaat: het desoriënterende dilemma is een gefaalde verwachting op het moment van topologische gereedheid.

On the cognitive effects of learning computer programming

Pea, R. D. & Kurland, D. M. (1984) — New Ideas in Psychology, 2(2)

Documenteert de specifieke moeilijkheden van novices bij het opbouwen van een mentaal model van programma-uitvoering — de hoge imaginaire-vectormagnitude in de verkennende fase.

Learning and teaching programming: A review and discussion

Robins, Rountree & Rountree (2003) — Computer Science Education, 13(2)

Empirische onderbouwing van de software-casestudy. Bevestigt volgorde-afhankelijkheid en documenteert de kwalitatieve verschuiving van syntactisch naar semantisch begrip.

Dynamic Memory / Explanation Patterns

Schank, R. C. (1982, 1986) — Cambridge University Press / Lawrence Erlbaum

Leren als scriptfalen. Dit essay integreert Schanks theorie als cognitieve trigger voor geometrische fase-inversie: scriptversterking = helische progressie; scriptfalen = fase-inversie.

Visual Program Simulation in Introductory Programming Education

Sorva, J. (2012) — Aalto University

Diepgaande analyse van het 'notionele machine'-probleem: novices houden veel onopgeloste spanningen vast zonder coherent integratiekader — de hoge $|\text{Im}(q)|$ -toestand in het model.

An empirically based instructional design theory for teaching concepts

Tennyson & Cocchiarella (1986) — Review of Educational Research, 56(1)

Rigoureuze empirische review die aantoont dat de volgorde van voorbeelden en niet-voorbeelden significant van invloed is op leerresultaten — het empirische probleem dat het niet-commutatieve model beoogt op te lossen.