

Harper's Homotopy Type Theory: Logische Basis

Bron: Homotopy Type Theory Lecture Course (Harper)

I. STARTPUNT: DRIE FUNDAMENTELE KEUZES

Harper bouwt HoTT expliciet voort op **Brouwer's intuïtionisme via Martin-Löf's intuïtionistische type-theorie**. Dit betekent drie ononderhandelbare keuzes:

- Wiskunde is constructie, niet spel met waarheidswaarden**
Bewijzen zijn concrete mentale constructies die je maakt, communiceert en verifieert—niet abstracte "mogelijkheden" die ergens waar of onwaar zijn.
- Bewijzen zijn proof-relevant**
Het doet ertoe *welk bewijs* je hebt, niet alleen *dat* er een bewijs is. Twee verschillende bewijzen van dezelfde stelling zijn mathematisch verschillende objecten.
- Klassieke axioma's zijn optioneel**
De wet van de uitgesloten derde (LEM) en dubbele-negatie-eliminatie (DNE) worden niet als globale achtergrond aangenomen, maar alleen lokaal gebruikt waar nodig. Dit geeft sterkere resultaten: stellingen rusten op magerdere fundamenteën.

Gevolg: Een systeem met minder aannames, meer structuur, rijkere bewijsobjecten.

II. HET DRIE-LAGEN LANDSCHAP VAN TYPE-THEORIE

Harper onderscheidt drie niveaus, elk een uitbreiding van het vorige:

Niveau	Kern	Toevoeging	Karakterisering
ITT	Intensional Type Theory	—	Types zijn <i>afhankelijk</i> , gelijkheden zijn <i>proof-relevant</i>
ETT	Extensional Type Theory	Principes die alle gelijkheden naar set-niveau "afvlakken"	Alle identiteiten worden gelijk; geen hogere structuur
HoTT	Homotopy Type Theory	Hogere inductieve types + univalence	Types als ∞ -groupoids / ∞ -topoi

Waar HoTT anders is: Types worden niet als verzamelingen gezien, maar als *ruimten met structuur op alle niveaus*—wat gelijkheden mogelijk maakt op gelijkheden, op gelijkheden op gelijkheden, enz.

III. DE METHODOLOGIE: GENTZEN'S PRINCIPE VAN INVERSIE

Dit is het hart van Harper's aanpak. **Elk connectief ($\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$) moet vier dingen hebben:**

A. Drie soorten regels

Regeltype	Wat bepaalt het	Rol in het systeem
Formation-	Wanneer A een goedgevormde propositie is	Syntactische welgeformtheid
Introductie-regels	<i>Hoe</i> bewijs je A waar? Wat is een concreet bewijs van A?	Betekenis van A ligt primair hier
Eliminatie-regels	<i>Wat</i> mag je uit een bewijs van A afleiden?	Dual aan introductie; wat je eruit haalt

B. Gentzen's Coherentie-eis (Inversie)

De kernvraag: Wanneer zijn introductie- en eliminatieregels goed gebalanceerd?

Gentzen's antwoord:

- **Lokale compleetheid:** De eliminatieregels moeten sterk genoeg zijn om alles terug te halen wat in de introductie feitelijk nodig was. Geen verlies van informatie.
- **Lokale soundness:** De eliminatieregels mogen niet sterker zijn dan het inverse van de introductie. Je mag niet meer concluderen dan je ooit hebt ingebracht.

Praktisch: Als je een regel kunt weglaten zonder dat je info verliest, is je introductie te sterk. Als je een regel toevoegt en plotseling conclusies trekt die niet in de introductie zaten, zijn je eliminatieregels te sterk.

IV. HET NEGATIEVE FRAGMENT: $\wedge, \top, \perp, \rightarrow$

Conjunctie ($\wedge$)

Formation:
$$\frac{A \text{ prop}, B \text{ prop}}{A \wedge B \text{ prop}}$$

Introduction:
$$\frac{A \text{ true}, B \text{ true}}{A \wedge B \text{ true}}$$

Elimination:
$$\frac{A \wedge B \text{ true}}{A \text{ true}} \quad \text{of} \quad \frac{A \wedge B \text{ true}}{B \text{ true}}$$

In woorden: Een bewijs van $A \wedge B$ is een paar (bewijs-van-A, bewijs-van-B). Uit $A \wedge B$ haal je beide componenten terug.

Coherentie-check:

- *Weglaten van een eliminatieregels?* Nee—je zou één component niet kunnen ophalen, verlies van informatie.
- *Verzwakken van introductie tot "uit A volgt $A \wedge B$ "?* Nee—dan zouden je eliminatieregels B concluderen zonder dat B ooit bewezen is aangeleverd.

Waarheid ($\top$) — de nullaire conjunctie

Formation: $\top$ prop

Introduction: $\frac{}{\top \text{ true}}$

Elimination: (leeg)

In woorden: $\top$ is altijd waar, het bewijs ervan bevat geen informatie. Je kunt er niets "uit halen" wat je niet al had.

Onwaarheid ($\perp$) — de nullaire disjunctie

Formation: $\perp$ prop

Introduction: (geen regel — $\perp$ is niet constructief bewijsbaar)

Elimination: $\frac{\perp \text{ true}}{C \text{ true}}$ (ex falso quodlibet)
(voor elke willekeurige C)

In woorden: Er is geen constructief bewijs van $\perp$. Juist daarom mag je uit $\perp$ alles afleiden—een gezond systeem zal nooit een bewijs van $\perp$ produceren, dus de sterkste eliminatieregels is veilig.

Coherentie-check: Ja, veilig—het bewijs waar je alles uit afleidt bestaat niet.

Implicatie ($\rightarrow$) — Internalisatie van hypothetisch redeneren

Dit is de sleutelregel. Harper maakt hier duidelijk dat $\rightarrow$ is de interne reflectie van aannames.

Formation: $\frac{A \text{ prop}, B \text{ prop}}{A \rightarrow B \text{ prop}}$

Introduction: $\frac{[A \text{ true}]}{B \text{ true}}$ (A is hypothetische aanname)
 $A \rightarrow B \text{ true}$

Elimination: $\frac{A \rightarrow B \text{ true} \quad A \text{ true}}{B \text{ true}}$ (modus ponens)

$B \text{ true}$

In woorden:

- Een bewijs van $A \rightarrow B$ is een constructie die, gegeven een bewijs van A, een bewijs van B oplevert.
- Je mag $A \rightarrow B$ waar verklaren als je, *onder de aanname dat A waar is*, B kunt bewijzen.
- Implicatie internaliseert wat buiten het systeem hypothetisch redeneren is.

Coherentie-check: Met weakening en reflexiviteit van entailment kun je aantonen dat modus ponens precies sterk genoeg is om het onderliggende hypothetische redeneerproces terug te winnen, maar niet sterker.

V. OORDELEN EN PROPOSITIE: HET ONDERSCHIED

Centraal verschil dat alles organiseert:

Concept	Betekenis	Voorbeeld
Propositie	Een uitspraak die onderwerp van een oordeel kan zijn	"Elke $n > 1$ is priem of product van priemen"
Oordeel	Wat je kunt weten; claims over waarheid	Dat deze propositie waar is (gegeven een bewijs)

De twee basisoordelen:

- **A prop:** A is een goedgevormde propositie
- **A true:** A is intuïtionistisch waar, d.w.z. er bestaat een *constructief bewijs* van A

Dit onderscheid voorkomt dat je automatisch aanneemt dat "of iets waar is, of onwaar" — je moet voor waarheid een bewijs hebben.

VI. ENTAILMENT EN STRUCTURELE REGELS

Zodra je aannames invoert, krijg je het entailment-oordeel:

$\Gamma \vdash A \text{ true}$

Lees dit als: *Onder aannames Γ is A waar.*

Γ is een lijst van aannames, elk van de vorm " $B \text{ true}$ ".

De drie structurele eigenschappen van $\vdash$

Hieronder geeft Harper drie *keuzes* die je kunt ontkennen om andere logica's te krijgen:

1. Reflexiviteit (onmisbaar)

$A \text{ true} \vdash A \text{ true}$

Dit is axiomatisch — je kunt een aanname gebruiken om zichzelf af te leiden.

2. Transitiviteit (onmisbaar)

$$\Gamma \vdash A \text{ true} \quad \Gamma, A \text{ true} \vdash B \text{ true}$$

$$\Gamma \vdash B \text{ true}$$

Dit maakt aannames fungeren als "plaatsvervangers" voor bewijzen.

3. Weakening (kunnen ontkennen!)

$$\Gamma \vdash A \text{ true}$$

$$\Gamma, B \text{ true} \vdash A \text{ true}$$

Extra aannames maken een bewijs niet ongeldig.

Ontkennen hiervan: Relevance Logic—elke aanname moet relevant gebruikt worden.

4. Contraction (kunnen ontkennen!)

$$\Gamma, A \text{ true}, A \text{ true} \vdash B \text{ true}$$

$$\Gamma, A \text{ true} \vdash B \text{ true}$$

Het aantal keer dat A in je context staat doet niet ter zake.

Ontkennen hiervan: Linear Logic—het aantal resources/aannames telt; je kunt A niet tweemaal gebruiken als je hem maar één keer hebt.

5. Permutation / Exchange (kunnen ontkennen!)

$$\Gamma, A, B, \Delta \vdash C$$

$$\Gamma, B, A, \Delta \vdash C$$

De volgorde van aannames doet niet ter zake.

Ontkennen hiervan: Ordered / Non-commutative Logic—geschikt voor gestructureerde data (lijsten, grammatica's), waar volgorde betekenis heeft.

Harpers boodschap: Dit zijn geen natuurwetten—het zijn *bewuste ontwerpkeuzes*. Een logisch systeem is ontworpen, niet onvermijdelijk.

VII. VAN PROOF-THEORIE NAAR ORDE-THEORIE: HEYTING-ALGEBRA

Nu draait Harper het perspectief 180°. Dezelfde logica kun je lezen als een **orde-theoretische structuur**.

Stap 1: Definieer een preorde op proposities

$$A \leq B \iff (A \text{ true} \vdash B \text{ true})$$

Lees dit als: "*A is zwakker dan B*" als uit elk bewijs van A ook een bewijs van B volgt.

Stap 2: Equivalentieklassen

$$A \sim B \iff (A \leq B) \wedge (B \leq A)$$

De equivalentieklassen vormen samen de **Lindenbaum-algebra** van je logica. Geordend door $\leq$.

Stap 3: Connectieven als universele constructies

Nu kun je alle connectieven herdefinieren als zuiver orde-theoretische objecten:

Connectief	Orde-theoretische betekenis
$A \wedge B$	Grootste ondergrens (meet) van A en B: elk element dat onder beide ligt, ligt ook onder $A \wedge B$
$A \vee B$	Kleinste bovengrens (join) van A en B
$\top$	Grootste element (top / final object)
$\perp$	Kleinste element (bottom / initial object)
$A \rightarrow B$	Exponentiaal: $C \leq A \rightarrow B \iff C \wedge A \leq B$. Dit internaliseert "vermenigvuldig met A, dan

Het resultaat: Heyting-algebra

Een lattice (geordende verzameling met meet/join) *met exponentialen*—precies dit heet een **Heyting-algebra**.

Fundamentele stelling:

$\Gamma \vdash A \text{ true}$ geldt in pure bewijstheorie

$\iff$

de overeenkomstige ongelijkheid geldt in elke Heyting-algebra

Dit betekent: dezelfde logica, twee volledige beschrijvingen—proof-theoretisch en order-theoretisch.

VIII. WAARHEID ZONDER BEWIJS: DECIDABILITY EN STABILITY

Dit onderscheid maakt duidelijk waar intuïtionisme van klassieke logica verschilt.

Decidability

$$A \text{ is decidable} \iff (A \text{ true} \vee \neg A \text{ true})$$

In klassieke logica: Dit geldt voor *elke* A—dat is LEM, de wet van de uitgesloten derde.

In constructief intuïtionisme: Dit moet je *per A bewijzen*.

Voorbeelden:

- $\top$ en $\perp$ zijn decidable (triviaal)
- Gelijkheid op $\mathbb{N}$: decidable (eindige data, je kunt checken)

- Gelijkheid op $\mathbb{R}$: niet decidable (reële getallen zijn oneindig)

Stability (dubbele-negatie-eliminatie)

A is stable $\iff (\neg\neg A \text{ true}) \supset A \text{ true}$

In klassieke logica: Dit geldt voor *elke* A .

In constructief intuïtionisme: Dit moet je *per* A bewijzen. Sommige proposities zijn enkel als $\neg\neg A$ (via bewijs-uit-het-ongerijmde) te bewijzen, zonder een direct bewijs van A .

Subtiel feit: $\neg\neg(A \vee \neg A)$ is *bewijsbaar*, maar je kunt intuïtionistisch niet bewijzen dat $(A \vee \neg A)$ zelf waar is—en ook niet dat het onwaar is. LEM is "niet-refuteerbaar".

IX. WAAROM DIT VOOR HOTT NODIG IS

Harper besluit met één lijn samenvat:

Je hebt een **proof-relevante, intuïtionistische logica** nodig waarin:

1. **Betekenis via structuur:** De betekenis van proposities ligt in introductie/eliminatie-regels, niet in waarheidswaarden.
2. **Internaliserend redeneren:** Implicatie spiegelt entailment; hypothesen worden proposities.
3. **Structurele regels zijn expliciet:** Weakening, contraction, permutation zijn keuzes, niet feiten—dit maakt plaats voor rijkere interpretaties.
4. **Dualiteit:** Dezelfde calculus werkt proof-theoretisch (wat kun je construeren?) ánd order-theoretisch (wat zijn de relaties tussen proposities?).
5. **Onderscheid van klassiek:** Via decidability en stability duidelijk maken dat klassieke axioma's *lokaal* geldig zijn, maar niet globaal—daardoor blijft ruimte voor de *proof-relevante structuur* en *hogere gelijkheden* die HoTT braucht.

Zonder deze logica zou je alle gelijkheden naar set-niveau afvlakken (ETT)—precies wat je *niet* wilt in HoTT.

X. PRAKTISCHE TOEPASSING: HET FRAMEWORK

Dit eerste college is geen los hoofdstuk "propositielogica". Het is het **fundament waarop alles volgt**:

- Proof-termen (Curry–Howard correspondence)
- Categoriale interpretaties
- Types als ∞ -groupoids
- Univalence

Elk van deze bouwstenen steunt op het onderscheid tussen oordelen/proposities, de rol van introductie/eliminatie-regels, en de coherentie-vereiste van Gentzen.

Harper demonstreert hier de **blauwdruk van constructieve wiskunde**: niet "wat is waar", maar "hoe construeer je, en welke structuur ontstaat daaruit".